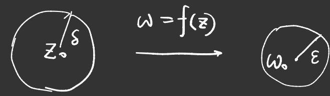
复变函数

平面点集. 点集 $\{z \mid |z-z_0|<\rho\}$ 称 z_0 的 ρ 邻域

$E \longrightarrow W$. $\quad w = f(z)$



极限

$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 连续的充要条件?

$$|u(x,y) - u(x_0,y_0)| \leqslant |f(z)-f(z_0)| \leqslant |u(x,y)-u(x_0,y_0)| + |v(x,y)-v(x_0,y_0)|$$

$f(z)$ 在 D 内每一点可微 $\rightarrow$ D 内解析

z_0 邻域内可微 $\longrightarrow$ z_0 解析. 否则为奇点

$f(z)$ 在 $z=x+iy$ 可微? ① $u.v$ 在 D 内可微. ② 处处满足 C-R.

$$f(z+\Delta z) - f(z) = (a+ib)\Delta z + o(\Delta z)$$

$$= (a+ib)(\Delta x + i\Delta y) + o(\rho) \qquad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

$$\Rightarrow \quad u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) = a\Delta x - b\Delta y + o(\rho)$$

$$v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y) = b\Delta x + a\Delta y + o(\rho)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad \text{C-R eqn}$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

T. $f(z) = e^x(\cos y + i\sin y)$. $e^x\cos y$ $ie^x\sin y$ $e^x\cos y = e^x\cos y$. ✓ $-e^x\sin y = -e^x\sin y$.

$w = \dfrac{az+b}{cz+d}$. $w = |z|^2 = \underbrace{x^2+y^2}_{u} + \underbrace{0}_{v}$.

对多值函数 $w=f(z)$. 在 $z=a$ 充分小邻域内作包围闭曲线 C.

当 z 绕 C 一周时 $f(z)$ 从一个值变到另一个值. a 为支点.

连接支点：支割线

复积分 $\int_C f(z)\,dz = \int_C (u+iv)(dx+idy)$

$$= \int_a^b (u+iv)\left[x'(t)+iy'(t)\right]dt = \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt$$

$$\int_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_C \frac{Rie^{i\theta}d\theta}{R^n e^{in\theta}} = \int_C iR^{1-n}e^{i(1-n)\theta}d\theta = R^{1-n}\frac{e^{i(1-n)\theta}}{1-n}\Bigg|_0^{2\pi} \begin{cases} 2\pi i, & n=1 \\ 0, & n\neq 1 \end{cases}$$

$\left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_C |f(z)|\,ds$. 长大不等式

$ds \downarrow |dz|$

$\left|\int_C e^{iz}dz\right| < \pi$

$\frac{2\theta}{\pi} \le \sin\theta \le \theta$

Cauchy 积分定理. $f(z)$ 在 $\overset{\text{闭路}}{C}+\overset{\text{单连通}}{D}$ 上解析. 则 $\int_C f(z)dz = 0$ (逆定理成立)

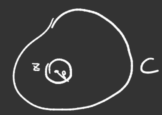
$\int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi$ 为单值函数.

简证. 设 $f'(z)$ 在D内连续. $\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy$

$$= -\iint_D\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + i\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy = 0.$$

Cauchy 积分公式. 闭路C及D内解析. D内任一点z

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$



$$\int_C \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = \int_\Gamma \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = \int_\Gamma \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z}\, d\xi + \underbrace{\int_\Gamma \frac{f(z)d\xi}{\xi - z}}_{\longrightarrow\, 2\pi i f(z)}$$

$\le \frac{\varepsilon}{\rho}\cdot 2\pi\rho \to 0$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi .$$ Cauchy 公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \qquad \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)(\xi - z - h)}$$

$$f(z+h) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z - h}\, d\xi \qquad h \to 0.$$

平均值公式. $f(z)$在 $|z-a| \le R$ 上解析. 则

$$f(a) = \int_C \frac{f(\xi)}{2\pi R}\, ds$$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - a}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\xi)}{R}\, iR\, d\theta = \frac{1}{2\pi R}\int_C f(\xi)\, ds$$

最大模原理. D内解析. C+D上连续. $|f(z)|$ ...

Cauchy 不等式 $f^{(n)}(z) \le \frac{n!M(R)}{R^n}$. $f'(z) \le \frac{M}{R}$

Liouville 定理 整函数 对所有z, $|f(z)| \le M$. 则 $f(z)$ 必为常数

代数学基本定理. $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots a_{n-1} z + a_n$, $n \ge 1$. $a_0 \ne 0$ 必有零点.

$f(z)$ 在 D 内解析，则其实部虚部为共轭调和函数.

$f(z) = u + iv$ 为解析函数，且 $f'(z) \neq 0$，那么 $u(x,y) = k_1$，$v(x,y) = k_2$ 在公共点上

永远相互正交. $$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}\right)\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\vec{j}\right) = 0.$$

设 $u(x,y)$ 是单连通 D 内的调和函数，则

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy + C_2$$

从 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

$\leftarrow$ 可得 ✓

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{\partial v}{\partial y}dx - \frac{\partial v}{\partial x}dy + C_1$$

$f_n(z)$ 在 D 内解析，且 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 在 D 内一致收敛，则 $f(z)$ 在 D 内解析

且 $$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)}(z)$$

取 D 内 z_0 邻域. $\int_C f(z)dz = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_C f_n(z)dz = 0$ ---- $f(z)$ 在 D 内解析.

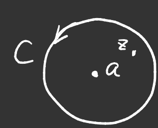
设复幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ 收敛半径为 $R>0$，则

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ 是 $|z-a|<R$ 的解析函数，并可逐项求导至任意阶.

解析函数的 Taylor 展开

--- 在圆域内部 $f(z)$ 可展开为

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$



奇点

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi \qquad \xi \in C \text{ 有 } \left|\frac{z-a}{\xi-a}\right| < 1$$

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - a + a - z} = \frac{1}{\xi - a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{\xi-a}} = \frac{1}{\xi-a} + \frac{z-a}{(\xi-a)^2} + \cdots \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}} \cdots$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}(z-a)^n\,d\xi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

在D内任一点a可展开为 $z-a$ 的幂级数 也是 $f(z)$ 在D内解析的充要条件

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n \quad \text{逐项积分得} \quad \mathrm{Ln}_0(1+z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}z^{n+1}$$

$$\mathrm{Ln}_k(1+z) = 2k\pi i + \cdots$$

$f(z) = z - \sin z \sim \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{5!}z^5$ around 0. 3阶零点

z_0 是不恒为零的解析 $f(z)$ m阶零点的充要条件是在 z_0 附近

$f(z) = (z-z_0)^m g(z)$, $g(z_0) \neq 0$ 且 $g(z)$ 在 z_0 解析

$$f(z) = a_m(z-z_0)^m + a_{m+1}(z-z_0)^{m+1}\cdots$$

令 $g(z) = a_m + a_{m+1}(z-z_0) + \cdots$. 则 $g(z)$ 在 z_0 解析且 $g(z_0) = a_m \neq 0$

零点的孤立性.

▷ 解析点附近 ⟶ 幂级数. 奇点附近 ⟶ Laurent 级数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n = \underline{\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$$

R

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}$$

r

$f(z)$ 在圆环域解析，则可展开为 Laurant 级数

$$r<|z-a|<R \qquad f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi$$

$f(z)=\exp\left[\frac{t}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内的 Laurant 展开？

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\exp\left[\frac{t}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]}{z^{n+1}}dz \qquad c \text{ 取 } |z|=1$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\exp\left[\frac{t}{2}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\right]}{e^{i(n+1)\theta}}\, ie^{i\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it\sin\theta}}{e^{in\theta}}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(t\sin\theta-n\theta)\,d\theta+\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(t\sin\theta-n\theta)\,d\theta$$

$\rightarrow 0$

另解．$$f(z)=\exp\left(\frac{t}{2}z\right)\cdot\exp\left(-\frac{t}{2}\frac{1}{z}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{t}{2}\right)^k z^k\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\left(\frac{t}{2}\right)^l\left(-\frac{1}{z}\right)^l \qquad k-l=n$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!(n+l)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2l+n}\right]z^n+\sum_{n=-1}^{-\infty}\left[\sum_{l=-\infty}^{-n}\frac{(-1)^l}{l!(n+l)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2l+n}\right]z^n$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(t)\,z^n.$$

有 $J_n(t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(t\sin\theta-n\theta)\,d\theta$

孤立奇点．　有限值．可去奇点．

∞．　极点．

不存在．　本性奇点．

留数定理　　若 $f(z)$ 在闭路 C 上解析．内部……以外解析

$$\int_c f(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[f(z),a_k\right]$$

$\mathrm{Res}\left[f(z), a\right] = a_{-1}$.　　$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c f(z)dz = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}, a\right] = \frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

积分计算　$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}$, $0<p<1$.　$\frac{2\pi}{1-p^2}$.　Poisson int

Cauchy 积分主值　$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx$

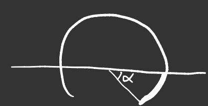
有瑕点的积分主值　$v.p.\int_{a+r}^{b} f(x)dx = \lim_{r\to 0^+}\left[\int_a^{c-r} f(x)dx + \int_{c+r}^{b} f(x)dx\right]$

$a>0$

约当引理　R 充分大时 $g(z)$ 在 $|z|=R$, $\mathrm{Im}\,z>-a$ 上连续 且 $\lim_{z\to\infty} g(z)=0$

则对任何正数 λ 都有　$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} g(z)\exp(i\lambda z)\,dz = 0$

$|\exp(i\lambda z)| \leq e^{\lambda a}$.



$\int_{,} \leq M(R)e^{\lambda a}\cdot\alpha R. \longrightarrow 0 \quad (R\to\infty)$

$\int_{\cap} \leq M(R)\int_0^{\pi} e^{-\lambda R\sin\varphi}R\,d\varphi$

$\leq e^{-\lambda R\varphi/\pi}$　　$= M(R)\frac{\pi}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda R}\right)\to 0$.

Laplace 变换　$F(s) = \int_0^{+\infty}\left[f(t)e^{-\sigma t}\right]e^{-ist}dt$　　$p=\sigma+is$

$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$　　$t<0$ 时 $f(t)=0$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt = L[f(t)]$$

即 $f(t)h(t)e^{-\sigma t}$ 的 Fourier 变换

$f(t)$ 指数增长型 $|f(t)| \leqslant K e^{ct}$

$F(p)$ 在 $\operatorname{Re} p > c$ 上有意义且解析.

$$L[e^{at}] = \int_0^{+\infty} e^{at} e^{-pt}\, dt = -\frac{e^{-(p-a)t}}{p-a}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p-a}. \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a.$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p-a}\right] = e^{at}.$$

$$L[\cos \omega t] = \frac{1}{2} L[e^{-i\omega t}] + \frac{1}{2} L[e^{-i\omega t}] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+i\omega} + \frac{1}{p-i\omega}\right) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$$

$$L[f'(t)] = pF(p) - f(+0)$$

$$L\left[\int_0^t f(t)\, dt\right] = \frac{F(p)}{p}.$$

$$L[e^{\lambda t} f(t)] = F(p-\lambda)$$