线性代数

向量组 S_1. S_2 互为线性组合. 等价. equivalent

rank S. 任一极大线性无关组所含向量个数. S 所含元素个数 $|S|$

W 是 F^n 子空间. ---- $\dim W = r$. $= W$ 的基所含向量个数 $= \operatorname{rank} W$.

数域 F 上 n 元齐次线性方程组解空间的维数 $\dim V_A = n - \operatorname{rank} A$.

F^n 子空间若包含 S. 则必包含 $V(S)$. 生成子空间

增广矩阵 augmented matrix

$S = \{\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}, \cdots \vec{\alpha_n}\}$. $x_1\vec{\alpha_1} + \cdots x_n\vec{\alpha_n} = \vec{\beta_n}$

有解 $\rightarrow$ $\vec{\beta}$ 是 S 的线性组合 $\vec{\beta} \in V(S)$. $\Rightarrow V(S\cup\{\vec{\beta}\}) = V(S)$

$\Rightarrow \dim V(S\cup\{\vec{\beta}\}) = \dim V(S) = \operatorname{rank} S = \operatorname{rank} A$

$\hookrightarrow = \operatorname{rank}(S\cup\{\vec{\beta}\}) = \operatorname{rank} \widetilde{A}$.

$\sigma: V_1 \longrightarrow V_2$. ⋯ 同构 isomorphic $V \longleftrightarrow F^n$

向量 坐标

F^n 可代表所有 n 维线性空间. 相互同构.

--- $F^r \rightarrow V$ 不是一一映射 --- 同态.

$\dim(W_1 + \cdots W_t) \leq \dim W_1 + \cdots \dim W_t$.

$\dim W \leq |M_1| + \cdots |M_t| = \dim W_1 + \cdots \dim W_t$.

$$\dim(W_1+W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1\cap W_2)$$

$W_1 \cdots W_t \in V$. $W = W_1 + \cdots W_t$.

若 $\vec{w} = \vec{w}_1 + \cdots \vec{w}_t$, $\vec{w}_i \in W_i$ 唯一. W 为 $W_1, \cdots W_t$ 的直和

$W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2 \iff W_1 \cap W_2 = 0$. $W \oplus U = V$. 补空间

存在唯一的 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_{n-1} x^{n-1}$ 使 $f(x_i) = y_i$ 对 $1 \le i \le n$ 成立.

$x_1, \cdots x_n$; $y_1, \cdots y_n$

n个不同复数 任意n个复数

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \left(\prod_{\substack{1\le i\le n \\ j\ne i}} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \right)$$ Lagrange 插值

同构映射 $\sigma: F_n[x] \longrightarrow F^n$. $f \mapsto (f(x_1), \cdots f(x_n))$

$$\sigma^{-1}: F^n \longrightarrow F_n[x]. \quad (y_1, \cdots y_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} y_i \left(\sum_{\substack{1\le i\le n, \\ j\ne i}} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \right)$$

$x_1\vec{\alpha}_1 + \cdots x_n\vec{\alpha}_n = \vec{\beta}$. 解 $(x_1, \cdots x_n) = \left(\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{\delta}_1}{\Delta}, \cdots \frac{\vec{\beta}\cdot\vec{\delta}_n}{\Delta} \right)$

$\delta_1 = \vec{\alpha}_2 \times \vec{\alpha}_3$. 实际上 $\vec{\beta}\cdot\vec{\delta}_j = \Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$. Cramer 法则 $(\Delta \ne 0)$

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

Laplace 展开. $|A| = \sum A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_r \end{pmatrix} \cdot (-1)^{i_1+\cdots+i_r+k_1+\cdots+k_r} A\begin{pmatrix} i_{r+1} & \cdots & i_n \\ k_{r+1} & \cdots & k_n \end{pmatrix}$.

r阶子式 ——代数余子式

对 n 阶方阵 A. $|A| \ne 0 \iff A$的行/列向量线性无关 $\iff \operatorname{rank} A = n$.

加边 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -b_1 & \cdots & b_n \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

奇数阶反对称 $|A| = 0$. $|A^T| = |A|$. $|A^T| = (-1)^n |A| = -|A|$.

$I = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$. $J = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$. $J^2 = -I$. 相当于 i.

$A^T = A$. 对称. $A^T = -A$. 反对称/斜对称. skew

AA^T 对称. $\overline{A}^T = A$. Hermite. $-A$. 反Hermite.

不要求方阵 ← 对称 反对称

可逆 invertible $A \in F^{n\times m}$ 可逆. $AX = D$ 有唯一解 $X = A^{-1}D$.

$AX = 0$ 至少有0解. 只有零解 $\Rightarrow$ A 各列线性无关.

A 可逆. 则为 $|A| \neq 0$ 方阵. 行列式为0: 奇异方阵. singular matrix

$A^* A = |A| I_{(n)}$. 伴随方阵.

$A.B$ 可逆. 则 $\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & \\ & B^{-1} \end{pmatrix}$.

可逆方阵可表示为若干初等方阵的乘积

$F^{n\times n}$ 全体可逆方阵集合记为 $GL(n,F)$

任意 $m\times n$ 矩阵可化为 $\begin{pmatrix} I_{(r)} & O \\ O & O \end{pmatrix}$. $r = \operatorname{rank} A$.

若 A 可逆. $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & O \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ O & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$ Schur 公式

同阶方阵 $|AB| = |A|\cdot|B|$. $|AB| = |BA|$.

(分解为 PAQ 证明)

$A\in F^{n\times m}$, $B\in F^{m\times n}$.

Binet-Cauchy 公式

$n>m$ $|AB| = 0$

$n=m$. $|AB| = |A|\cdot|B|$.

$n<m$. $|AB| = \sum\limits_{1\le k_1 <\cdots k_n \le m} A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$

$\operatorname{rank} A$ = 非零子式最高阶数 $\operatorname{rank} AB \le \operatorname{rank} A$ 且 $\le \operatorname{rank} B$.

$A\in F^{m\times n}$. P m阶. Q n阶. 均可逆. $\operatorname{rank}(PAQ) = \operatorname{rank} A$.

$A, B\in F^{m\times n}$. A 可通过系列初等变换变成 B. 相抵/等价 equivalent

存在可逆 $P.Q$ 使 $B = PAQ$.

R_A 相抵等价类 equivalent class

$S = \begin{pmatrix} I_{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相抵标准形

canonical form of equivalent matrices

$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$.

$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} \ge \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$.

$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B - n \le \operatorname{rank} AB \le \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$ Sylvecter ineqn

$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} AA^T$.

$\varphi: U\to V$. 所有线性映射都是同态. 可逆的线性映射是同构

$U = F^n$, $V = F^m$. $\pi: U\to V$, $(x_1,\cdots x_n)\mapsto(x_1,\cdots x_m)$ 投影或嵌入

向量 $\vec{\alpha} \mapsto \mathcal{A}(\vec{\alpha})$ $\qquad$ $\mathcal{A}(\vec{\alpha}_1, \cdots \vec{\alpha}_n) = (\vec{\beta}_1, \cdots \vec{\beta}_m) A$

坐标 $X \mapsto AX$ $\qquad$ $F^{n\times 1} \to F^{m\times 1}$ $\qquad$ $\mathcal{A}$在基M_1, M_2下的矩阵

$U \in F^n$, $V \in F^m$. $U \to V$ 全体线性映射组成的集合记为 $L(U,V)$

每个 $\mathcal{A} \in L(U,V)$ 有唯一的 $A \in F^{m\times n}$

$$\mathcal{A}: U \to V. \quad (\vec{\alpha}_1, \cdots \vec{\alpha}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto (\vec{\beta}_1, \cdots \vec{\beta}_m) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$\varphi: \mathcal{A} \mapsto A$. $\qquad$ 线性映射对应到基M_1, M_2下的矩阵A.

$L(U,V) \to F^{m\times n}$ 同构

V 是 F 上有限维线性空间. $f: V \longrightarrow F$. V 上的线性函数

全体线性函数的集合 $L(V,F)$. F上的n维线性空间.

V的对偶空间. V^*

$f \in V^*$ 即 $L(V,F)$ 在M下矩阵 $A \in F^{1\times n}$ 记作 $\sigma(f)$. $V^* \to F^{1\times n}$ 同构映射

Tr 是 $F^{n\times n}$ 的线性函数 $\qquad$ 基之间的过渡矩阵是可逆方阵

$\mathcal{A}: U \to V$. $\qquad$ $\mathcal{A}(U) = \{\mathcal{A}(\vec{\alpha}) \mid \vec{\alpha} \in U\}$ 映射的像/$\mathcal{A}$的值域 image

$\mathcal{A}^{-1}(\vec{0}) = \{\vec{\alpha} \in U \mid \mathcal{A}(\vec{\alpha}) = \vec{0}\}$ 核 $\qquad$ $\ker \mathcal{A}$

$\dim(\mathrm{Im}\,\mathcal{A}) = \mathrm{rank}\,\mathcal{A}$ $\qquad$ $\dim U = \mathrm{rank}\,\mathcal{A} + \dim(\ker \mathcal{A})$

$\mathcal{A}: U \to V$.

$W = \ker \mathcal{A}$. $\qquad$ $\vec{\alpha} - \vec{\alpha}_1 \in W$. 模$W$同余

全体记为 U/W. quotient space

A. B 为 F 上 n 阶方阵. 若存在 n 阶可逆 P 使 $B = P^{-1}AP$, 相似.

V 的同一线性变换在 V 的两组基下的矩阵相似.

线性变换 $\mathcal{A}: V \to V$ 可对角化充要条件:

存在 $\mathcal{A}$ 的一组特征向量 $\vec{p}_1, \cdots \vec{p}_n$ 组成 V 的一组基

特征多项式和特征值是相似不变量. Tr. det 也是.

$\varphi_A(\lambda) = \prod_{i=1,\cdots,l} (\lambda - \lambda_i)^{l}$ ← 代数重数

上/下三角矩阵的对角元就是全部特征值

$(A - \lambda_0 I)X = 0$. 解空间 $V_{\lambda_0} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_0 I)$

$\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_0 \mathcal{I})$ $\mathcal{A}$ 属于 λ_0 的特征子空间

V 的线性变换 $\mathcal{A}$ 可对角化. $\Leftrightarrow$ 各 V_{λ_i} 维数和为 dim V

m_i, 几何重数 geometric multiplicity

充要条件: $n_i = m_i$

$f(A) = O$. 则 $f(\lambda)$ 是 A 的零化多项式.

次数最低. 最小多项式 $d_A(\lambda)$.

复方阵 A 可对角化

$\Leftrightarrow$ $d_A(\lambda)$ 无重根

任意方阵 $A \in F^{n \times n}$ 的特征多项式

$\varphi_A(\lambda) = \lambda^n - c_1\lambda^{n-1} + \cdots (-1)^n c_n$ 都是 A 的零化多项式. $\varphi_A(A) = O$.

$A^k = O$. A 称为幂零的. nilpotent

所有的复方阵都相似于 Jordan 形矩阵

$(\mathcal{A}-a\mathcal{I})^k\beta=0$. 根向量

n 维复线性空间 V 的任意变换 $\mathcal{A}$ 的根向量组成 V 的一组基.

$\mathcal{A}$ 有 t 个不同特征值，$\varphi_{\mathcal{A}}(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{n_t}$.

$\mathcal{A}$ 的属于 λ_i 的全体根向量与零向量一起组成子空间 $\ker(\mathcal{A}-\lambda_i\mathcal{I})^{n_i}$. 维数为 n_i.

根子空间 W_{λ_i}

$V=W_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus W_{\lambda_t}$. $\mathcal{A}$ 作用的空间 V 分成了根子空间的直和

A 相应成为对角矩阵

$\mathcal{A}$ 是 V 上的线性映射. W 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间

W 的基 $M_1=\{\vec{\alpha}_1,\cdots\vec{\alpha}_m\}$ 扩充为 $M=\{\vec{\alpha}_1,\cdots\vec{\alpha}_m,\cdots\vec{\alpha}_n\}$

则 $\mathcal{A}$ 在 M 下的矩阵为准上三角形 $A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{pmatrix}$

扩充基 $\Leftrightarrow$

$F[\lambda]$，全体多项式集合. $A=(a_{ij}(\lambda))_{m\times n}$ 称为 λ 矩阵. 也称多项式矩阵

$Q(x_1,x_2,\cdots x_n)=\sum_{1\le i\le j\le n} a_{ij}x_ix_j$ 二次型 平方和：标准型

$F^{n\times 1}\to F$，$(x_1,x_2,\cdots x_n)\mapsto Q(x_1,x_2,\cdots x_n)$

$Q(X)=X^TSX$. S 称为二次型的 Q 矩阵

有 n 阶正定对称方阵 S. 对 $\forall\vec{\alpha},\vec{\beta}\in V$. 在基 M 下坐标为 X.Y. 则定义

$(\vec{\alpha},\vec{\beta})=X^TSY$. 内积

$\downarrow$

基 M 中向量两两内积组成的矩阵. 度量矩阵 metric matrix

也称 Gram 方阵

保内积、保全等 $\longrightarrow$ 正交变换

$(\mathcal{A}(\alpha), \beta) = (\alpha, \mathcal{A}^*(\beta))$ 伴随变换

$\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$ 规范变换 $A^TA = AA^T$ 规范方阵